Exercice 1 :

En utilisant la définition de la dérivée, étudier la dérivabilité de la fonction f en a dans les cas suivants:

1. $f(x)=2x^2-|x-1|+1$; $a=1$
2. $f(x)=\dfrac{x-3}{2x+1}$; $a=-1$
3. $\begin{cases} f(x)=2x^2-x & ;x<0 \\ f(x)=x\sqrt{x} & ;x\geq 0 \end{cases}$; $a=0$

Exercice 2 :

Donner une approximation affine à la fonction f au voisinage de a dans les cas suivants:

1. $f(x)=x^2-x+1$; $a=1$
2. $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+3}$; $a=-2$
3. $f(x)=x^3-x^2-3x-11$; $a=3$

Exercice 3 :

Déterminer les dérivées de chacune des fonctions suivantes :

1. $f:x\mapsto\sqrt{x^2-1}$ sur $[2;+\infty[$.
2. $h:x\mapsto\left(\dfrac{1}{x}-2x\right)^3$ sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 4:

Déterminer la dérivée de la fonctions f dans les cas suivants :

$f(x)=3x^4-6x^2+12x-9$; $f(x)=x^4-\sqrt{6}x^3+2x$

$f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$; $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$; $f(x)=\left(x^2-2x\right)^3$

; $f(x)=\sqrt{3x^4+4x}$; $f(x)=\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}\right)^2$

Exercice 5 :

Etudier la dérivabilité de la fonction f , donner son ensemble de dérivabilité puis calculer sa dérivée f' :

$f(x)=\left(x^3-2x+2\right)^3$; $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$;

$f(x)=\dfrac{1}{x\left(x^2+1\right)}$; $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2+1}$; $f(x)=\dfrac{1}{|x|+1}$

Exercice 6 :

Étudier les variations de la fonction f dans les cas suivants :

$f(x)=x^3-3x^2+3$; $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-1}$;

$f(x)=\sqrt{x^2-2x}$; $f(x)=x^2+|x|+2$;

Exercice 7 :

f est la fonction définie sur $Df=]-\infty;3[\cup]3;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{ax+b}{x-3}$ où a et b sont réels. On sait que la droite d'équation $y=4$ est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$. De plus $f'(1)=\dfrac{1}{2}$.

1. Trouver les valeurs de a et b .
2. Étudier les limites aux bornes de Df .
3. Dresser le tableau de variations de f .

Exercice 8 :

On pose : $g(x)=2x^3+x-2$.

1. Etudier les variations de g.
2. Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α.
Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
3. Etudier le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.
En déduire les variations de la fonction :
$f:x\mapsto\sqrt{x^4+(x-2)^2}$.

Exercice 9 :

Soit la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{3x+1}{x^3-3x+3}$

1. Montrer que l'équation $x^3-3x+3=0$ admet une seule solution α sur $\mathbb{R}$, en donner une valeur approchée à 10^{-1} près et en déduire l'ensemble de définition Df de la fonction f .
2. Montrer que $f'(x)=-\dfrac{3\left(2x^3+x^2-4\right)}{\left(x^3-3x+3\right)^2}$. Montrer que l'équation $2x^3+x^2-4=0$ admet une seule solution β sur $\mathbb{R}$, en donner une valeur approchée à 10^{-1} près puis en déduire le signe de f' et les variations de f .
3. Déterminer les limites aux bornes de Df ainsi que les asymptotes à la courbe de f .

Exercice 10 :

Soit f la fonction définie par $f(x)=x+\sqrt{x-1}$

1. Montrer que f est dérivable sur $]1;+\infty[$ puis calculer $f'(x)$
2. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.
3. Calculer $f(2)$, montrer que f^{-1} est dérivable en 3, puis, calculer $\left(f^{-1}\right)'(3)$.
4. Calculer $f^{-1}(x)$ en fonction de x .

Dans tout ce qui suit, Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

Exercice 01 :

Déterminer les branches infinies de la courbe (Cf) d'une fonction f dans les cas suivants :

$$f(x)=x+\frac{1}{x^2+1} \quad ; \quad f(x)=\sqrt{x+1} \quad ;$$
$$f(x)=x+\sqrt{x^2+x+1} \quad ; \quad f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

Exercice 02 :

Déterminer les branches infinies de la courbe (Cf) d'une fonction f dans les cas suivants :

$$f(x)=x\sqrt{x-2} \quad ; \quad f(x)=\sqrt{x+2}-x \quad ;$$
$$\begin{cases} f(x)=x^2+x & si \quad x\leq 0 \\ f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}} & si \quad x>0 \end{cases}$$

Exercice 03 :

Etudier la convexité de la courbe représentative de la fonction f dans les cas suivants :

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+1 \quad ; \quad f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$$
$$; \quad f(x)=\frac{x^2+x+3}{x+2}$$

Exercice 04 :

Etudier la convexité de la courbe représentative de la fonction f dans les cas suivants :

$$f(x)=\sqrt{2x-2}+x \quad ; \quad f(x)=16\sqrt{x-1}+x^2 \quad ;$$
$$f(x)=x+\frac{1}{x^2+1} \quad ; \quad f(x)=-\frac{1}{2}\sqrt{x+1}-\frac{2}{\sqrt{x+1}}$$

Exercice 05 :

Etudier la convexité de la courbe représentative de la fonction f et déterminer les points d'inflexion (s'ils existent) dans les cas suivants :

$$f(x)=\frac{x}{3x^2+3} \quad ; \quad f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-4x+1 \quad ;$$
$$f(x)=(x-1)\sqrt{x-1}$$

Exercice 06 :

Déterminer le centre de symétrie de la courbe représentative de la fonction f dans les cas suivants:

a. $f(x)=4x^3+x^5$; **b.** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+7}-1}{x^3+x}$

Exercice 07 :

Vérifier que le point I est un centre de symétrie de la courbe de f dans les cas suivants:

a) $f(x)=x^3-3x+2$ et $I(0;2)$

b) $f(x)=\dfrac{5x+1}{1-2x}$ et $I\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{5}{2}\right)$

c) $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$ et $I(-1;-2)$

Exercice 08 :

Déterminer l'axe de symétrie de la courbe représentative de la fonction f dans les cas suivants:

a. $f(x)=x^2-4x+1$; **b.** $f(x)=x^4+\sqrt{x^2+1}$;

c. $f(x)=\dfrac{2}{x^2+3x-4}$

Exercice 09 :

Soit f une fonction définie par : $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+2-x^2}$

a. Déterminer le point d'inflexion de la courbe représentative de f

b. Montrer que ce point est un centre de symétrie de la courbe représentative de f

Exercice 10 :

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\sqrt{x^2-1}-x-3$

Et soit (Cf) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1. Déterminer Df , l'ensemble de définition de f
2. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$
3. Etudier les branches infinies de la courbe (Cf)
4. Etudier la dérivabilité de f à droite de 1 et à gauche de -1 .Puis donner des interprétations graphique aux résultats.
5. Calculer $f'(x)$ pour tout x de $Df\setminus\{-1;1\}$. puis dresser le tableau de variation de f
6. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une seule solution α telle que $-2<\alpha<-\dfrac{3}{2}$
7. Construire la courbe (Cf) (l'unité est $1\,cm$)
8. Montrer que la restriction g de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty;-1[$, admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera

Exercice 01 :

Soit f une fonction définie comme de suit : $f(x)=x^2+x+\sqrt{x}$

1) Déterminer D_f et calculer les limites dans ses bornes.
2) Montrer que f est continue sur D_f.
3) Étudier la dérivabilité de f en $x_0=0$, et donner une interprétation géométrique.
4) Calculer $f'(x)\ \forall x\in\left]0;+\infty\right[$, et donner le tableau de variation de f.
5) Étudier les branches infinies de C_f.
6) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1}, définie de J vers $I=\left]0;+\infty\right[$.
7) Tracer la courbe de f dans un repère orthonormé.
8) La courbe $C_{f^{-1}}$ de f^{-1} est la symétrie de C_f par rapport à la droite $(\Delta): y=x$, tracer la droite (Δ) puis la courbe $C_{f^{-1}}$.

Exercice 02 :

On considère la fonction g définie comme de suit : $g(x)=-2x^3+6x+1$

1) Déterminer D_g et calculer les limites dans ses bornes.
2) Montrer que g est continue sur D_g.
3) Étudier les branches infinies de C_g.
4) Calculer $g'(x)\ \forall x\in\mathbb{R}$, puis donner le tableau de variation de g et déterminer ses extremums.
5) Montrer que l'équation $g(x)=2$ admet au moins une solution dans l'intervalle [-2 ; 2].
6) Calculer $g''(x)\ \forall x\in\mathbb{R}$, puis déterminer le point d'inflexion de g et donner le tableau de sa concavité.
7) Tracer la courbe C_g dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.
8) Déterminer graphiquement, le nombre des solutions de l'équation $g(x)=0$.

Exercice 03 :

Soit la fonction $f: x\to 2x^4-4x^2+1$

C désigne la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, puis interpréter graphiquement les résultats.

2- a- Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x)=8x(x^2-1)$

b- Dresser le tableau de variation de f.

3- Tracer la courbe C dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

4- Déterminer graphiquement, suivant les valeurs du réel k, le nombre de solutions de l'équation: $f(x)=k$.

5- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=1$, et en déduire les solutions de l'inéquation $f(x)>1$.

Exercice 04 :

Soient la fonction $f: x\to\sqrt{x^2+2x+3}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

1- a- Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

b- Vérifier que la droite $(\Delta): x=-1$ est un axe de symétrie de la courbe C.

2- a- Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et que:

$$f'(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}.$$

b- Préciser le sens de variation de f sur $\left[-1;+\infty\right[$.

c- Prouver que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

d- Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

3- a- Vérifier que $f(x)-(x+1)=\dfrac{2}{\sqrt{x^2+2x+3}+(x+1)}$.

b- En déduire que la droite D: $y=x+1$ est asymptote à la courbe C au voisinage de $+\infty$.

c- Vérifier que $f(x)-(-x-1)=\dfrac{2}{\sqrt{x^2+2x+3}+(-x-1)}$

d- En déduire que la droite D': $y=-x-1$ est asymptote à la courbe C au voisinage de $-\infty$.

4- Tracer les droites D et D', puis la courbe C.